

## ЛЕКЦИЯ 1

Теория механизмов и машин (ТММ): объект изучения, основные понятия, цели и задачи. Основные характеристики механизмов: функции положений, первая и вторая передаточные функции, коэффициент полезного действия (КПД).

### 1.1. Теория механизмов и машин. Общие сведения

Теория механизмов и машин – раздел прикладной механики, в котором изучаются машины и входящие в их состав механизмы.

Машина – техническая система, предназначенная для осуществления движений и обеспечения усилий, необходимых для выполнения какого-либо технологического процесса. По функциональному назначению различают транспортные, технологические, энергетические и информационные машины.

- Транспортные машины предназначены для перемещения пассажиров и грузов в пространстве. К ним относятся автомобили, локомотивы, водный и воздушный транспорт, ракеты-носители, подъемно-транспортные машины; роботы-манипуляторы, предназначенные для выполнения транспортных операций.
- Технологические машины предназначены для обработки материалов и заготовок с целью получения готовых изделий. К технологическим машинам относится основное оборудование промышленных предприятий: металлообрабатывающие, деревообрабатывающие станки, прокатные станы, кузнечно-прессовые машины, машины литья под давлением и т.п.; роботы-манипуляторы, предназначенные для выполнения основных технологических операций (сварка, сборка, окраска).
- Энергетические машины предназначены для преобразования подаваемой к ним энергии одного вида в энергию другого вида, необходимую для выполнения технологического процесса. К ним относятся двигатели и генераторы.
- Информационные машины предназначены для преобразования информации. К ним относятся электронные вычислительные машины различных принципов действия, периферийное оборудование ЭВМ (принтеры, плоттеры, дигитайзеры, графопостроители, сканеры и т.п.).

Как сложные системы, машины состоят из следующих функциональных частей: механическая часть, двигатели, источники питания, система управления движением. Механическая часть служит для преобразования механической энергии двигателей в энергию требуемых движений рабочих органов машины. Механическая часть, как правило, состоит из нескольких отдельных механизмов. Двигатели, по принципу действия, могут быть тепловыми (например, двигатели внутреннего сгорания), электрическими, гидравлическими или пневматическими. Источники питания могут быть как

автономными, так и стационарными. Система управления движением осуществляет контроль внутреннего состояния машины, управляемых перемещений и состояния внешней среды с помощью датчиков, информация с которых подается на входы вычислительной системы, управляющей энергией источников питания машины. Современные машины, системы управления движением которых построены на основе микропроцессорных средств, образуют особый класс машин – мехатронные системы.

*В ТММ изучаются теоретические основы строения, функционирования и проектирования механизмов и машин, разрабатываются инженерные методы анализа и синтеза механизмов, которые позволяют проектировать новые машины, отвечающие всему комплексу требований задания на проектирование (технических, эксплуатационных, экономических, эргономических, экологических).*

Анализ любого сложного объекта состоит в том, чтобы выявить свойства и особенности объекта путем его расчленения на более простые составляющие. Под синтезом, наоборот, подразумевается создание сложного объекта, обладающего заданными характеристиками, из некоторого числа элементов с заранее известными свойствами. В теории механизмов решаются задачи структурного, кинематического, динамического (силового), а также точностного анализа и синтеза механизмов.

## **1.2. Механизм и его основные характеристики**

Под механизмом, в широком смысле, понимается преобразователь механической энергии, подаваемой на его входы, в механическую энергию с требуемыми параметрами, получаемую на выходах. С этой точки зрения механизм, по принципу действия, аналогичен электрической схеме (которая преобразует электрическую энергию на входах в электрическую энергию, но с другими параметрами, на выходах схемы). В теории механизмов используется более конкретное определение:

механизм – система подвижно связанных между собой твердых тел, предназначенная для воспроизведения заданных движений одного или нескольких тел. *По существу, это определение задает математическую модель, которая позволяет теоретически (с применением математики и теоретической механики) исследовать важнейшие свойства любого реального механизма.*

Твердое тело, входящее в состав механизма, называется звеном.

Входным звеном называется то звено, посредством которого к механизму подводится механическая энергия от двигателя.

Выходным звеном механизма называется звено, совершающее требуемое технологическое движение.

Стойкой называется условно неподвижное (базовое) звено, относительно которого рассматривается движение остальных звеньев механизма.

У механизма может быть несколько входных и несколько выходных звеньев. Простейший случай – механизм с одним входным и одним выходным звеном.

Механизм может иметь множество различных характеристик (габаритные размеры, инерционные характеристики, упругая податливость кинематической цепи, максимальная передаваемая мощность, точность воспроизведения движений и т.п.), но к основным характеристикам любого механизма относят функцию положения и коэффициент полезного действия. Функция положения – это зависимость, связывающая положения выходных звеньев механизма с положениями его входных звеньев. Для механизма с одним входным и одним выходным звеном (рис. 1,а) функция положения записывается в виде:

$$\psi = \psi(\varphi),$$

где  $\varphi$  – положение входного звена,  $\psi$  – положение выходного звена.

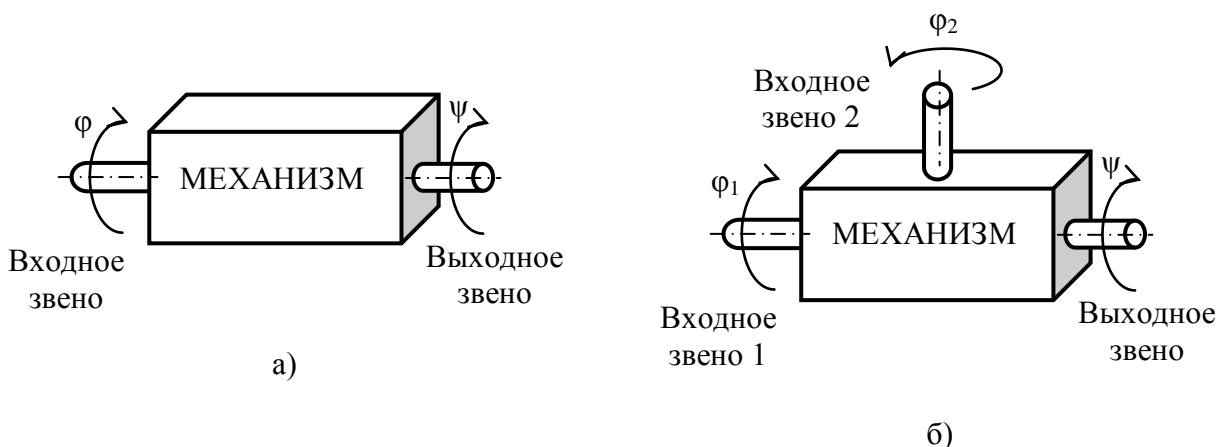


Рис. 1

В случае механизма с двумя входными и одним выходным звеном (рис. 1,б) функция положения будет функцией двух аргументов:

$$\psi = \psi(\varphi_1, \varphi_2),$$

где  $\varphi_1$  – положение входного звена 1,  $\varphi_2$  – положение входного звена 2. В общем случае у механизма может быть несколько функций положения:

$$\psi_i = \psi_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $n$  – число выходных,  $m$  – число входных звеньев. *Функция положения зависит от структурного строения механизма и от геометрических параметров его звеньев, но она явным образом не зависит от времени.*

В некоторых задачах кинематики механизмов функция положения является заранее заданной, но в большинстве случаев она неизвестна и ее требуется определить.

Зная функцию положения, можно решать задачи кинематического, динамического, точностного анализа и синтеза механизма. Если требуется вычислить скорость  $\dot{\psi}$  и ускорение  $\ddot{\psi}$  выходного звена механизма (рис. 1,а), то это можно осуществить, воспользовавшись соотношениями:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \dot{\varphi},$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2,$$

где  $\dot{\varphi}$  - скорость,  $\ddot{\varphi}$  - ускорение входного звена. Множитель  $\partial \psi / \partial \varphi$  называется первой передаточной функцией или аналогом скорости; множитель  $\partial^2 \psi / \partial \varphi^2$  - второй передаточной функцией или аналогом ускорения.

#### Задача

Передаточная функция кулачкового механизма с вращательным выходным звеном - коромыслом имеет вид  $\psi = A \sin^2 \varphi$ , где  $\varphi$ , *рад* – угол поворота кулачка,  $\psi$ , *рад* – угол поворота коромысла,  $A$  – константа, определяемая геометрией механизма. Кулачок вращается по закону  $\varphi(t) = \omega t$ , где  $\omega$ , *рад/с* – постоянная угловая скорость кулачка. Найти угловую скорость и ускорение коромысла.

#### Решение

Так как кулачок вращается равномерно, то  $\dot{\varphi} = \omega$  и  $\ddot{\varphi} = 0$ . Вычислим аналог скорости и аналог ускорения:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (A \sin^2 \varphi) = 2A \sin \varphi \cos \varphi = A \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (A \sin 2\varphi) = 2A \cos 2\varphi.$$

Вычислим теперь скорость и ускорение коромысла, учитывая, что  $\varphi(t) = \omega t$  :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = A \omega \sin 2\omega t, \text{ рад/с};$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \ddot{\varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \dot{\varphi}^2 = 2A \omega^2 \cos 2\omega t, \text{ рад/с}^2.$$

Коэффициент полезного действия представляет собой отношение полезной работы, совершаемой на выходных звеньях механизма, к работе, совершаемой двигателями на входных звеньях. КПД показывает, насколько эффективно данный механизм преобразует энергию. Уравнение баланса мощности, передаваемой механизмом, имеет вид:

$$P_{ex} = P_{вых} + P_{mn},$$

где  $P_{ex}$  – мощность на входных звеньях механизма,  $P_{вых}$  – мощность на выходных звеньях механизма,  $P_{mn}$  – мощность тепловых потерь на трение. Поделив правую и левую части этого уравнения на  $P_{ex}$ , получим:

$$1 = \eta + \chi,$$

где  $\eta = P_{вых}/P_{ex}$  – КПД,  $\chi = P_{mn}/P_{ex}$  – коэффициент потерь. Так как в любом реальном механизме есть потери мощности из-за наличия трения ( $P_{mn} > 0$ ), то его КПД находится в пределах  $0 \leq \eta < 1$ . С точки зрения преобразования энергии механизм тем лучше, чем выше его КПД. Поэтому при проектировании, производстве и эксплуатации механизмов стремятся обеспечить значение КПД как можно более высоким. *КПД механизма зависит от его конструктивного устройства, технического состояния, условий эксплуатации, наличия смазки, а также от полезной нагрузки на выходных звеньях.* Зависимость КПД от мощности  $P$ , потребляемой на выходе механизма представлена графиком (рис. 2).

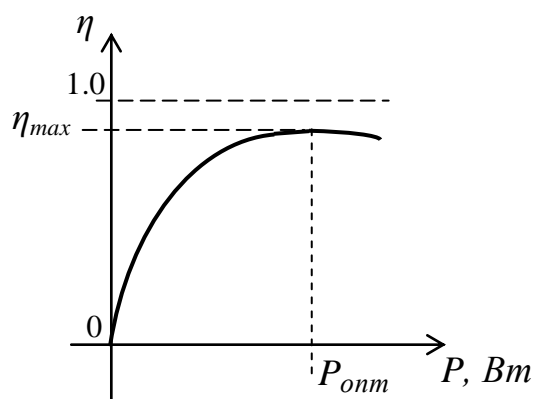


Рис. 2

График показывает, что если механизм не нагружен (работает вхолостую), то его КПД равен нулю. Наибольшее значение КПД достигается при оптимальной нагрузке. Если механизм перегрузить, то его КПД, как показывает практический опыт, будет несколько меньше максимально возможного значения. Зависимость КПД механизмов от нагрузки следует учитывать при эксплуатации машин.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «машина»
2. На какие категории подразделяются машины по функциональному назначению?
3. Из каких функциональных частей состоит машина?
4. В чем состоит прикладное значение теории механизмов и машин?
5. Дайте определение понятию «механизм»
6. Какие характеристики механизма являются основными?
7. Что такое функция положения механизма?
8. Почему функция положения механизма явно не зависит от времени?
9. Что называют аналогом скорости и аналогом ускорения?
10. Какие инженерные задачи могут быть решены с помощью функции положения механизма?
11. Что такое коэффициент полезного действия механизма?
12. Что характеризует КПД?
13. Почему КПД реальных механизмов всегда меньше единицы?
14. Почему КПД работающего вхолостую механизма равен нулю?

## ЛЕКЦИЯ 2

Понятие кинематической пары и классификация кинематических пар. Условные обозначения звеньев и кинематических пар на схемах механизмов. Структурная и кинематическая схемы механизма. Классификация механизмов.

### 2.1. Кинематические пары. Схемы механизмов

Кинематическая пара – подвижное соединение двух звеньев. Из теоретической механики известно, что твердое тело (рис. 3) в трехмерном пространстве имеет шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных.

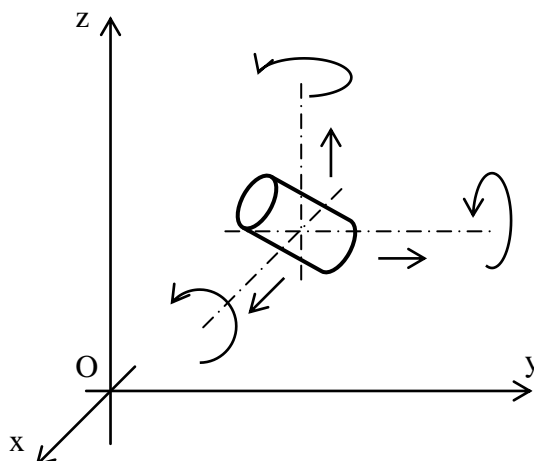


Рис. 3

Если одно звено соприкасается с другим звеном, то, относительно этого звена оно лишается одной или нескольких степеней свободы. В подвижном соединении одно звено относительно другого может иметь максимум пять степеней свободы, минимум – одну степень свободы. В теории механизмов, вместо принятого в теоретической механике словосочетания «степень свободы», часто используют термин «подвижность». Можно сказать, что в соединении двух звеньев, каждое из этих звеньев накладывает на другое определенное число ограничений относительного перемещения – так называемых связей. *Класс кинематической пары определяется числом независимых связей, накладываемых одним звеном на другое в их подвижном соединении.* Таким образом, кинематические пары подразделяются на пять классов, а подвижность кинематической пары определяется формулой:

$$W_r = 6 - S_r, \quad S_r = 1, 2, \dots, 5,$$

где  $S_r$  – класс кинематической пары. Обозначение « $r$ » в формуле указывает на то, что речь идет о связях и подвижностях одного звена относительно другого (лат. *Relativus* - относительный).

Кинематическая пара называется высшей, если контакт звеньев осуществляется по линии или в точке.

Кинематическая пара называется низшей, если звенья соприкасаются по поверхности.

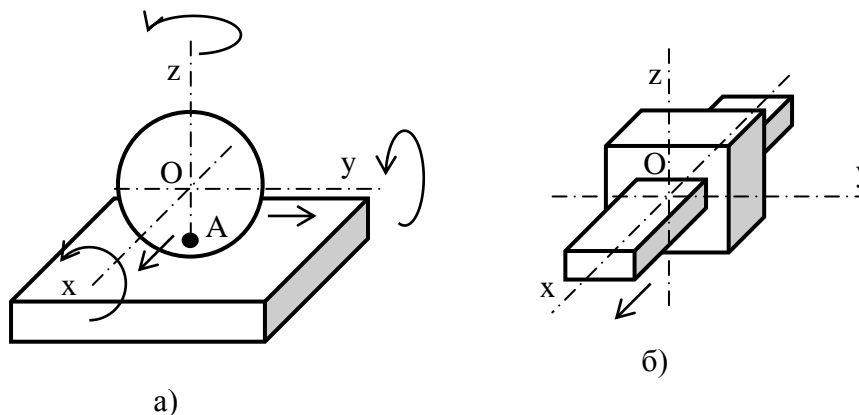


Рис. 4

### Пример 1

Кинематическая пара шар-плоскость (рис. 4,а) имеет первый класс, так как контакт шара и плоскости в точке А дает только одну связь ( $S_r = 1$ ). Подвижность пары  $W_r = 6 - S_r = 6 - 1 = 5$ . Данная кинематическая пара является высшей.

## Пример 2

Поступательная кинематическая пара (рис. 4,б) имеет пятый класс ( $S_r = 5$ ) и является одноподвижной. Контакт звеньев в данной кинематической паре осуществляется по поверхностям, поэтому пара – низшая.

В таблице 1 приведены графические и буквенные обозначения кинематических пар, которые используются при составлении схем механизмов.

Таблица 1

Наименование пары	Обозначение		$S_r$	$W_r$	Высшая или низшая
	Буквенное	Графическое			
Поступательная	П		5	1	низшая
Вращательная	В		5	1	низшая
Винтовая	Ви		5	1	низшая
Цилиндрическая	Ц		4	2	низшая
Сферическая	С		3	3	низшая
Сферическая с пальцем	Сп		4	2	низшая
Плоскостная	Пл		3	3	низшая
Цилиндр – плоскость	Ц - Пл		2	4	высшая
Шар – плоскость	Ш – Пл		1	5	высшая

Структурная схема дает представление о структуре механизма (его звеньях и кинематических парах), на ней также указываются направления движений входных и выходных звеньев. Звенья на схеме нумеруются арабскими цифрами, причем стойка всегда обозначается цифрой «0». Проектирование механизма начинается с разработки его структурной схемы.

Кинематическая схема является более информативной: она содержит также сведения об основных геометрических размерах звеньев и выполняется в масштабе. Разработка кинематической схемы механизма осуществляется на основе его структурной схемы.



## 2.2. Классификация механизмов

Механизмы различаются по функциональному назначению, по конструктивному устройству, по расположению в пространстве, по наличию или отсутствию замкнутых кинематических контуров.

По функциональному назначению механизмы подразделяются на исполнительные, передаточные и программные.

- Исполнительные механизмы предназначены для приведения в движение рабочих органов машины в соответствии с выполняемым технологическим процессом.
- Передаточные механизмы служат для преобразования механической энергии двигателей в механическую энергию с параметрами, требуемыми для приведения в движение входных звеньев исполнительного механизма.
- Программные механизмы задают программу движения механической части машины.

### Пример

Рассмотрим транспортную машину – автомобиль. Рабочими органами автомобиля являются колеса. Исполнительный механизм – шасси. Коробка передач – многоступенчатый передаточный механизм, необходимый для согласования работы двигателя и шасси в различных режимах движения машины. Двигатель автомобиля содержит газораспределительный механизм, который является программным (он управляет движением впускных и выпускных клапанов двигателя).

По конструктивному устройству различают рычажные, зубчатые, кулачковые и фрикционные механизмы.

- Механизм, в котором все кинематические пары низшие, называется рычажным (рис. 5,а).
- В зубчатом механизме движение от одного звена к другому передается посредством зубчатого зацепления (рис. 5,б).
- Кулачковый механизм содержит звено со сложным профилем, называемое кулачком (рис 5,в).
- Во фрикционном механизме движение от одного звена к другому передается за счет сил трения (рис. 5,г; звенья вспомогательного винтового механизма, предназначенного для поджатия колеса 1, не пронумерованы).

Механизмы также могут быть комбинированными: например, зубчато-рычажный или зубчато-фрикционный механизмы.

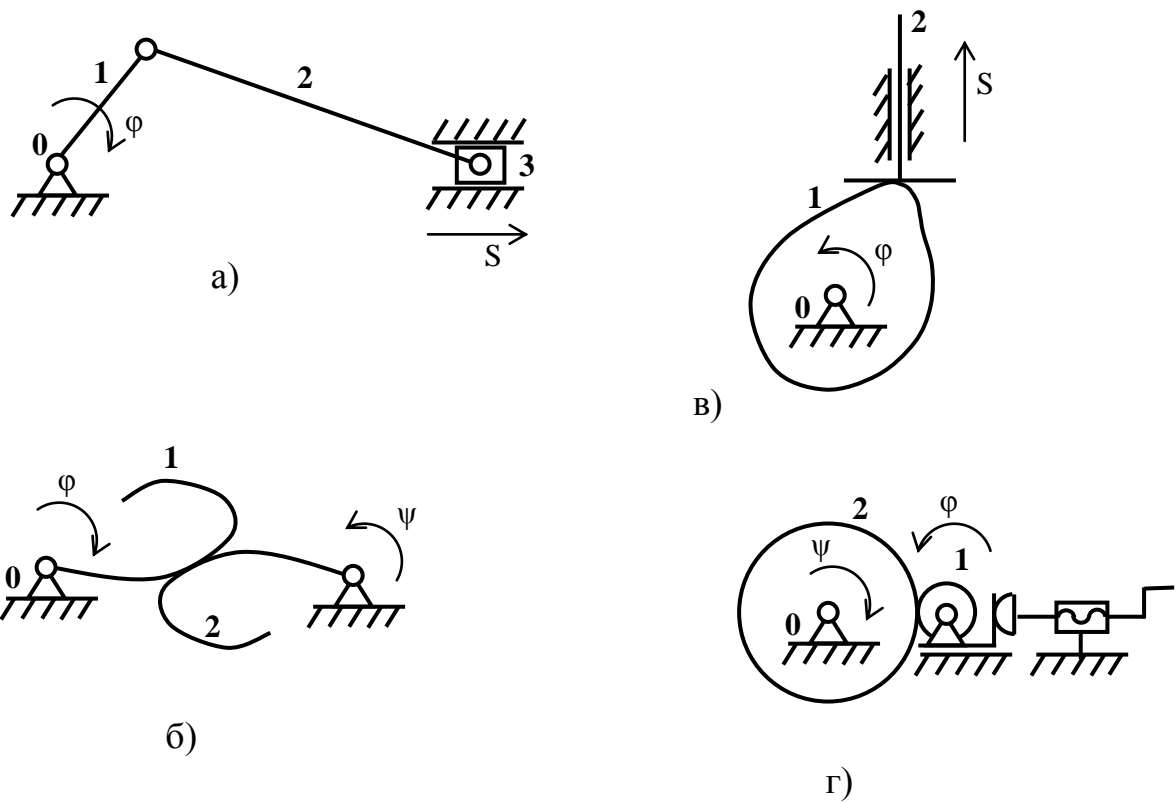


Рис. 5

По расположению в пространстве механизмы подразделяются на плоские и пространственные.

- Механизм называется плоским, если траектории точек всех его подвижных звеньев находятся в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости. На рис. 5 показаны структурные схемы плоских механизмов.
- Механизм называется пространственным, если траектории точек его подвижных звеньев лежат в непараллельных плоскостях. На рис. 6 приведена схема пространственного механизма – манипулятора, работающего в сферической системе координат.

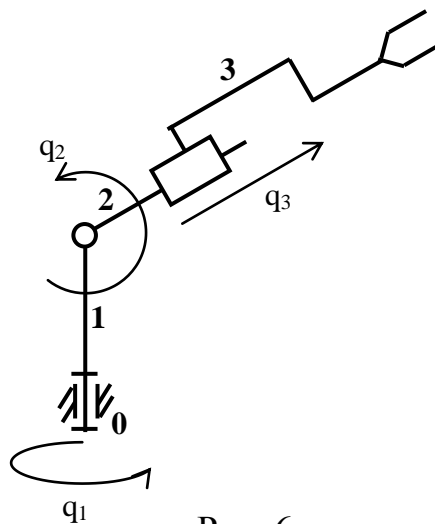


Рис. 6

Механизм называется замкнутым, если каждое его звено образует, как минимум, две кинематические пары. Если есть хотя бы одно звено, образующее только одну кинематическую пару, механизм – разомкнутый.

Механизм называется одноконтурным, если он содержит один замкнутый кинематический контур. Если в механизме имеется более чем один замкнутый контур, то механизм – многоконтурный. На рис. 5 приведены схемы замкнутых одноконтурных механизмов; на рис. 6 – схема разомкнутого механизма, не имеющего замкнутых кинематических контуров.

### Контрольные вопросы

1. Что называется кинематической парой?
2. Что называют подвижностями кинематической пары?
3. Как определяется класс кинематической пары?
4. Может ли кинематическая пара иметь класс выше пятого? Обоснуйте свой ответ.
5. Какие кинематические пары называются низшими? Высшими?
6. Чем отличается структурная схема механизма от его кинематической схемы?
7. Перечислите разновидности механизмов по функциональному назначению.
8. Какие механизмы называются рычажными?
9. Чем отличается плоский механизм от пространственного механизма?
10. Сформулируйте условие, в соответствии с которым механизм определяется как замкнутый.
11. Может ли разомкнутый механизм иметь замкнутые кинематические контуры? Обоснуйте свой ответ.

## ЛЕКЦИЯ 3

Плоские четырехзвенные рычажные механизмы. Наименования звеньев рычажных механизмов. Степени свободы механизмов. Универсальные структурные формулы. Основные и местные подвижности в механизмах.

### 3.1. Плоские четырехзвенные рычажные механизмы

Плоские четырехзвенные рычажные механизмы имеют широкое распространение в технике. К механизмам, наиболее часто используемым в различных машинах, агрегатах и приборах, относятся шарнирный четырехзвенный механизм (Рис. 7,а), кривошипно-ползунный (Рис. 7,б), кулисный (Рис. 7,в), синусный (Рис. 7,г) механизмы, механизм эллипсографа (Рис. 7,д), а также механизм с качающимся цилиндром (Рис. 7,е).

Звенья рычажных механизмов имеют специальные названия. Например, звенья 1 и 3 в механизме, изображенном на рис. 7,а, имеют название кривошип, если способны совершать полный оборот относительно своих осей вращения.

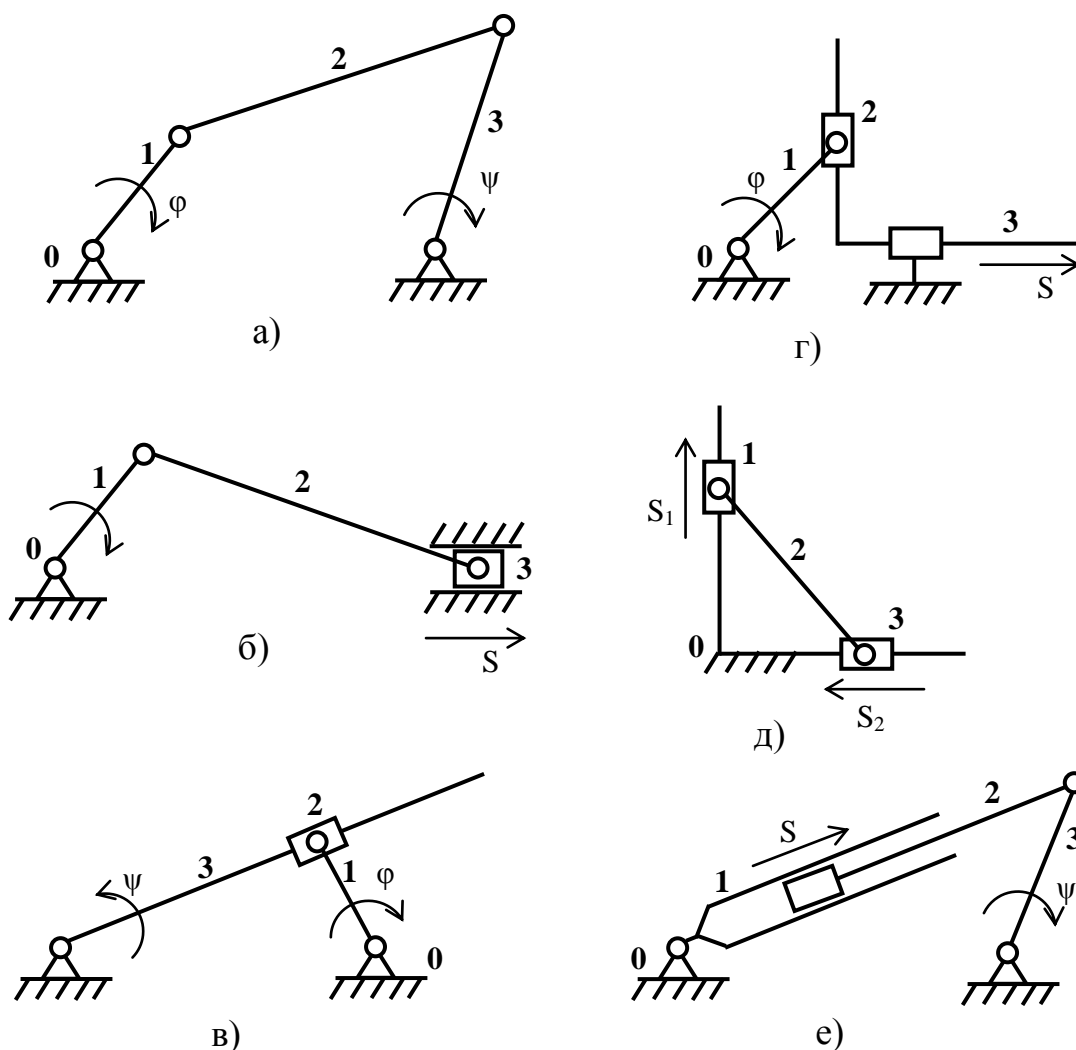


Рис. 7

Если какое-либо из указанных звеньев не может совершать полный оборот (в силу соотношений геометрических размеров звеньев), то оно будет называться коромыслом.

Звено 3 в механизме (Рис. 7,б) называется ползун, а звено 2 – шатун. *Вообще говоря, ползуном называют звено, поступательно перемещающееся относительно неподвижной стойки, а шатуном – звено, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями.* Особые названия имеют звенья 2 и 3 в механизме, схема которого дана на рис 7, в: звено 2 здесь называется кулисный камень (другое, менее распространенное название звена 2– ползушка), а звено 3 – кулиса. Кулисный камень, по существу, является вырожденным шатуном. Механизм, изображенный на рис. 7,г, называется синусным потому, что имеет функцию положения  $S = A \sin \varphi$ , где  $A$  – константа, которая определяется геометрическими параметрами звеньев. Механизм (Рис.

7,д) называется эллипсографом, так как, при его движении, точки шатуна 2 образуют относительно стойки траектории – эллипсы. Звено 1 в механизме (Рис. 7,е) называется цилиндр, а звено 2 – шток. Такой механизм часто используют в машинах, оснащенных гидравлическим или пневматическим приводом.

### 3.2. Степени свободы механизма. Универсальные структурные формулы

Степенью свободы механизма называется независимое перемещение одного или нескольких звеньев его кинематической цепи относительно стойки.

В инженерной практике различают два типа механической системы: механизм и конструкция. *Механизм имеет хотя бы одну степень свободы, тогда как конструкция обладает нулевым либо отрицательным числом степеней свободы.* При проектировании и изготовлении механизма важно обеспечить требуемое число его степеней свободы; при проектировании и изготовлении жесткой конструкции, напротив, важно не допустить возникновения степеней свободы и превращения конструкции в механизм.

Для определения числа степеней свободы по схемам механизмов существуют так называемые универсальные структурные формулы. Пусть имеется механизм, число звеньев которого равно  $n$  и в нем есть кинематические пары всех пяти классов. Так как в механизме всегда есть стойка, то число подвижных звеньев  $n-1$ . Наибольшее возможное число степеней свободы такой системы в пространстве составит  $6(n-1)$ . Если считать, что связи в кинематических парах – независимые, то общее число связей, ограничивающих перемещение звеньев, выразится равенством:

$$S = 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1 = \sum_{i=1}^5 ip_i,$$

где  $i$  – класс кинематической пары,  $p_i$  – число кинематических пар, имеющих класс  $i$ . Тогда число степеней свободы механизма определится в виде разности:

$$W = 6(n-1) - S = 6(n-1) - \sum_{i=1}^5 ip_i.$$

Полученное равенство известно в теории механизмов под названием структурная формула Сомова – Малышева.

#### Задача 1

Определить число степеней свободы манипулятора, схема которого изображена на рис. 6.

## Решение

Манипулятор содержит  $n=4$  звена, имеет две вращательные и одну поступательную кинематические пары. Все указанные пары имеют пятый класс, поэтому  $p_5=3$  и  $p_4=p_3=p_2=p_1=0$ . Тогда число степеней свободы манипулятора

$$W = 6(n-1) - \sum_{i=1}^5 ip_i = 6 \cdot (4-1) - 5 \cdot 3 = 3.$$

## Задача 2

Определить число степеней свободы плоского шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 7,а).

## Решение

Механизм содержит четыре звена и четыре вращательные кинематические пары:  $n=4$ ,  $p_5=4$ ,  $p_4=p_3=p_2=p_1=0$ . Число степеней свободы механизма

$$W = 6(n-1) - \sum_{i=1}^5 ip_i = 6 \cdot (4-1) - 5 \cdot 4 = -2.$$

*Полученный результат означает, что четырехзвенник с произвольно ориентированными в пространстве осями шарниров является не механизмом, а дважды статически неопределимой конструкцией.* Для возникновения одной степени свободы требуется, чтобы три независимые связи в механизме стали повторяющимися (избыточными). Это достигается обеспечением параллельности осей шарниров, т.е. механизм должен быть обязательно плоским.

Для плоских механизмов существует структурная формула Чебышева:

$$W = 3(n-1) - 2p_H - p_B,$$

где  $p_H$  – число низших,  $p_B$  – число высших кинематических пар. Решая задачу 2 по формуле Чебышева ( $p_H = 4$ ,  $p_B = 0$ ), получим

$$W = 3(n-1) - 2p_H - p_B = 3 \cdot (4-1) - 2 \cdot 4 = 1.$$

Существуют плоские механизмы, в которых звенья кинематической цепи движутся только поступательно. Такие механизмы называют клиновыми:

наиболее часто они используются в ригельных замках. Схема трехзвенного клинового механизма изображена на рис. 8.

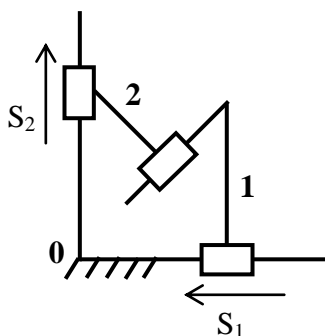


Рис. 8

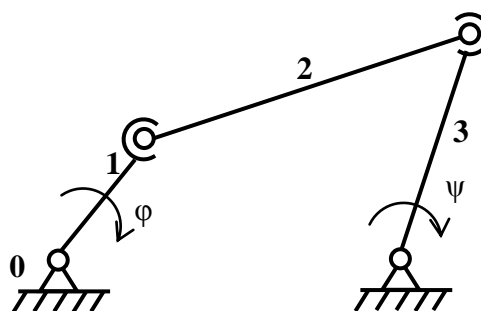


Рис. 9

Для определения числа степеней свободы клиновых механизмов используется структурная формула Добровольского:

$$W = 2(n-1) - p_H.$$

Число степеней свободы механизма (Рис. 8):  $W = 2(n-1) - p_H = 2 \cdot (3-1) - 3 = 1$ .

### 3.3. Местные подвижности

Местными подвижностями называются степени свободы механизма, не оказывающие влияния на передачу основного движения.

Рассмотрим механизм (Рис. 9). По формуле Сомова – Малышева число его степеней свободы ( $n = 4$ ,  $p_5 = p_3 = 2$ ,  $p_4 = p_2 = p_1 = 0$ )

$$W = 6(n-1) - \sum_{i=1}^5 ip_i = 6 \cdot (4-1) - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2.$$

То есть, этот механизм не только существует как пространственный, но еще имеет две степени свободы. Одна степень свободы здесь является основной подвижностью, необходимой для передачи движения от звена 1 к звену 3. Вторая степень свободы (вращение шатуна 2 вокруг собственной оси) не влияет на передачу основного движения, поэтому является местной подвижностью.

В общем случае, механизм может иметь как основные, так и местные подвижности: его число степеней свободы определяется равенством:

$$W = W_O + W_M,$$

где  $W_O$  – число основных,  $W_M$  – число местных подвижностей.

Местные подвижности часто предусматривают в механизмах с целью обеспечения более благоприятного распределения нагрузки на звенья и

равномерного изнашивания контактирующих поверхностей. При необходимости, местные подвижности можно устранить, повысив класс соответствующих кинематических пар.

### Контрольные вопросы

1. Перечислите наиболее часто используемые плоские четырехзвенные рычажные механизмы. Приведите примеры машин или приборов, в которых есть такие механизмы.
2. Чем отличается кривошип от коромысла? Коромысло от кулисы?
3. Что называют степенью свободы механизма?
4. Чем отличается механизм от конструкции?
5. Что означает множитель «6» в структурной формуле Сомова - Малышева?
6. Для каких механизмов используется структурная формула Чебышева?
7. Какие механизмы называют клиновыми? Какую структурную формулу следует использовать для расчета степеней свободы клинового механизма?
8. Что называют местной подвижностью?
9. С какой целью местные подвижности предусматривают в механизмах?
10. Как можно устранить местную подвижность?

## ЛЕКЦИЯ 4

Избыточные связи в механизмах. Классификация, выявление и устранение избыточных связей. Принцип строения рычажных механизмов. Классификация структурных групп.

### 4.1. Избыточные связи

Избыточными называют такие связи, которые не накладывают новых ограничений на перемещения звеньев механизма, а только повторяют уже существующие. Избыточные связи могут быть как в отдельных кинематических парах, так и на уровне механизма в целом. Различают избыточные связи трех типов: *A*, *B* и *B* (по предложению профессора Озола).

Избыточные связи типа *A* имеют место в отдельных кинематических парах. Для передачи усилия от одного звена к другому теоретически достаточно контакта в одной точке (Рис. 10,а). Если передача усилия обеспечивается поверхностным контактом, то соприкосновение звеньев во всех точках поверхности, кроме одной, будет образовывать избыточные связи типа *A* (Рис. 10,б).



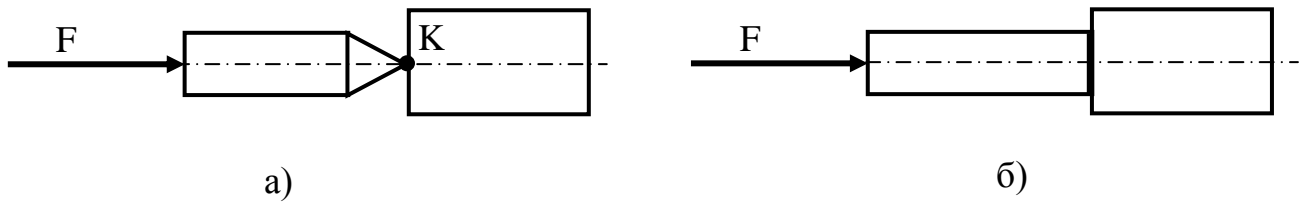


Рис. 10

Избыточные связи типа *A* являются полезными, когда требуется передача значительных усилий, поскольку звенья реальных механизмов не являются абсолютно твердыми, и в случае точечного контакта при большой силовой нагрузке будут иметь место существенные деформации, возможно также разрушение звеньев в зоне их соприкосновения. В отдельных случаях связи типа *A* являются вредными и устраняются. Например, кинематическая пара цилиндр-поршень в двигателе внутреннего сгорания будет работоспособной, если поверхностный контакт поршня с цилиндром заменить линейным контактом цилиндра с компрессионными кольцами (Рис. 11).

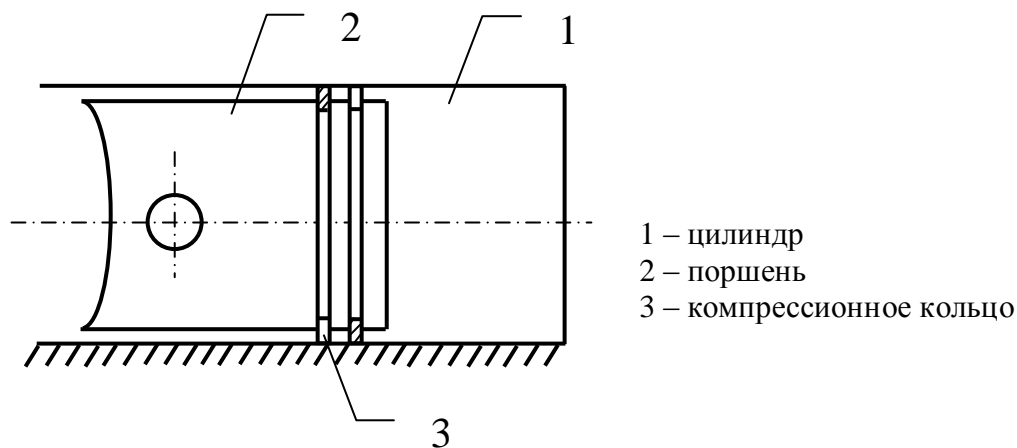


Рис. 11

Избыточные связи типа *B* имеют место в кинематических парах с ветвлением. Число избыточных связей типа *B* рассчитывается по формуле:

$$\sigma = \sum_i S_i - S,$$

где *i* - индекс ветвления пары, *S<sub>i</sub>* - число независимых связей в *i* - той ветви, *S* - класс кинематической пары.

## Пример

На рис. 12 изображена поступательная кинематическая пара с двумя ветвлениями.

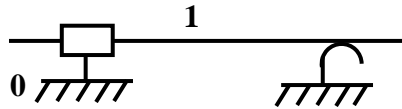


Рис. 12

Рассчитаем число избыточных связей типа  $B$ :  $i=1,2$ ,  $S_1=5$  (ветвление поступательное),  $S_2=2$  (ветвление цилиндр-плоскость)  $S=5$  (класс поступательной пары – пятый),

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 S_i - S = 5 + 2 - 5 = 2.$$

Избыточные связи типа  $B$  увеличивают жесткость кинематической пары, но требуют повышенной точности изготовления звеньев и сборки пары.

Избыточные связи типа  $B$  образуются при замыкании кинематических цепей в контуры, отсюда их второе название – контурные избыточные связи. Их число определяется по формуле Озола:

$$q = W + 6k - f,$$

где  $W$  – число степеней свободы механизма,  $k$  – число замкнутых кинематических контуров,  $f$  – суммарное число степеней свободы кинематических пар механизма. Для плоского механизма число контурных избыточных связей может быть также найдено по формуле Малышева:

$$q = W_q - W_{CM},$$

где  $W_q$  – число степеней свободы механизма, рассчитанное по формуле Чебышева,  $W_{CM}$  – число степеней свободы того же механизма, рассчитанное по формуле Сомова – Малышева.

## Задача

Определить число избыточных связей в плоском шарнирном четырехзвенном механизме (Рис. 7,а).

## Решение

Для данного механизма  $W = 1$ ,  $k = 1$  (один замкнутый контур) и  $f = 4$  (четыре одноподвижные кинематические пары). Тогда по формуле Озола:

$$q = W + 6k - f = 1 + 6 \cdot 1 - 4 = 3.$$

Механизм имеет три контурные избыточные связи, что и было отмечено в Задаче 2 п. 3.2.

Контурные избыточные связи увеличивают жесткость механизма, но требуют повышенной точности изготовления звеньев и сборки механизма. При необходимости, они могут быть устранены путем понижения класса одной или нескольких кинематических пар.

Избыточные связи могут быть также привнесены в механизм путем введения в его схему дополнительных звеньев. Рассмотрим механизм сдвоенного параллелограмма (рис. 13).

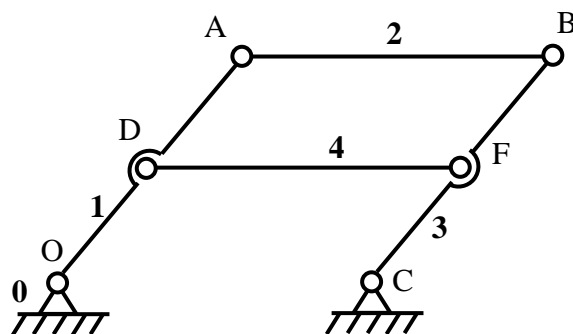


Рис. 13

Здесь дополнительное звено – шатун 4. Так как механизм плоский, рассчитаем его число степеней свободы по формуле Чебышева ( $n = 5$ ,  $p_H = 6$ ,  $p_B = 0$ ):

$$W = 3(n - 1) - 2p_H - p_B = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 0.$$

Полученный результат означает, что с точки зрения структурного строения, рассматриваемая система механизмом не является. Для того чтобы

возникла одна степень свободы, требуется соблюдение геометрических условий:  $AB = DF$ ,  $AB \parallel DF$ ,  $OD = CF$ ,  $AD = BF$ . Следовательно, введение дополнительных звеньев в схему механизма влечет за собой необходимость точного соблюдения определенных геометрических размеров при изготовлении звеньев.

## 4.2. Принцип строения рычажных механизмов

Принцип строения рычажных механизмов, сформулированный русским ученым Л.В. Ассуром в 1910 г., состоит в следующем.

- Механизм может быть условно разделен на две основные части: начальный механизм, обладающий подвижностью механизма в целом, и ведомую цепь, подвижность которой относительно звеньев начального механизма равна нулю.
- Ведомая цепь, в свою очередь, может быть разделена на структурные группы звеньев (группы Ассура), каждая из которых обладает нулевой подвижностью.

Принцип Ассура широко применяется в решении задач структурного синтеза, а также в задачах кинематики и динамики механизмов. Структурным группам присваивается класс и порядок. Каждая структурная группа, согласно ее основному свойству, удовлетворяет равенству:

$$W_r = 3n_r - 2p_r = 0,$$

где  $W_r$  – число степеней свободы группы,  $n_r$  – число звеньев,  $p_r$  – число кинематических пар группы. Ясно, что данное равенство удовлетворяется при следующих значениях:  $n_r = 2k$ ,  $p_r = 3k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

По предложению профессора Баранова, число  $k$  называется классом структурной группы. Таким образом, двухзвенные группы имеют первый класс, четырехзвенные – второй и т.д. Порядок группы (по Ассуру – Артоболовскому) определяется числом внешних кинематических пар, условно отнесенных к группе, которыми данная группа присоединяется к сопряженным с ней звеньям механизма. Такие кинематические пары принято называть поводками.

Структурных групп первого класса второго порядка существует пять (Рис. 14).

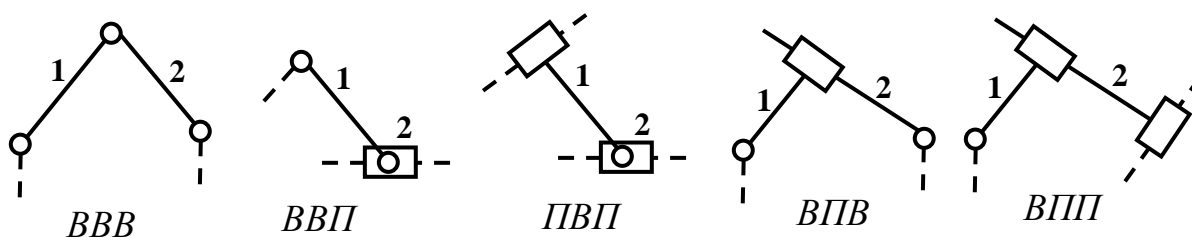


Рис. 14

Двухзвенные структурные группы наиболее часто встречаются в используемых на практике рычажных механизмах. Также известны четырех- и шестизвенные структурные группы, которые встречаются в механизмах достаточно редко. Примеры таких групп даны на рис. 15.

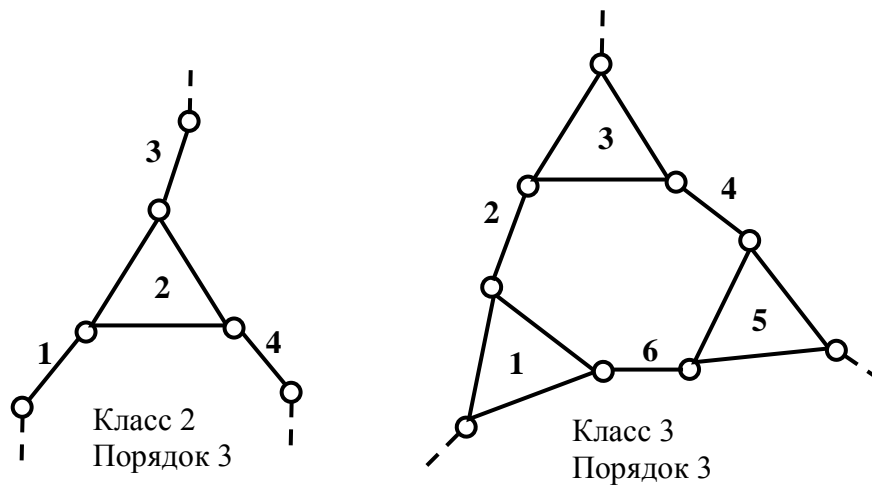


Рис. 15

Класс механизма определяется наивысшим классом входящих в его состав структурных групп.

### Пример

Разделить на структурные группы механизм стана холодной калибровки труб (рис. 16).

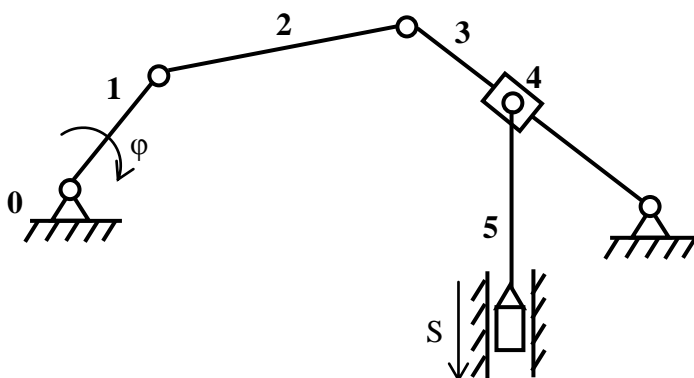


Рис. 16

Данный механизм состоит из шести звеньев (0 – стойка, 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – кулиса, 4 – кулисный камень, 5 – ползун), имеет пять вращательных (0-1, 1-2, 2-3, 3-0, 4-5), одну поступательную (3-4) и одну цилиндрическую (5-0) кинематические пары. Все кинематические пары низшие, механизм –

рычажный. Механизм также является плоским, содержит два замкнутых кинематических контура (0-1-2-3-0, 0-3-4-5-0). Число степеней свободы механизма найдем по формуле Чебышева:

$$W = 3(n-1) - 2p_H - p_B = 3 \cdot (6-1) - 2 \cdot 7 = 1.$$

Начальный механизм: стойка 0 – кривошип 1 (Рис. 17,а),  $W_{HM} = 1$ ; ведомую цепь составляют звенья: 2, 3, 4, 5 (Рис. 17,б).

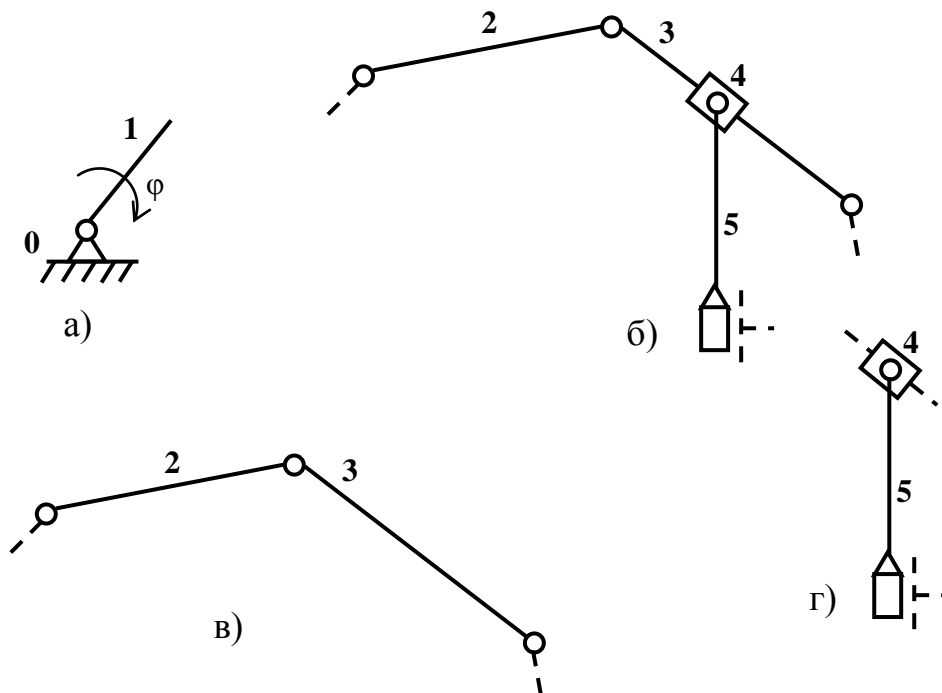


Рис. 17

Ведомая цепь состоит из двух структурных групп первого класса второго порядка: *ВВВ* (Рис. 17,в) и *ПВП* (Рис. 17,г).

### Контрольные вопросы

1. Какие связи в механизме называют избыточными?
2. Какие избыточные связи могут быть выявлены на уровне кинематической пары?
3. Как определить число контурных избыточных связей?
4. Какими преимуществами и недостатками обладают механизмы с избыточными связями?
5. Сформулируйте принцип строения рычажных механизмов.
6. Перечислите двухзвенные структурные группы. Почему структура *ППП* не является группой Ассура?
7. Как определяется класс и порядок группы Ассура?

## ЛЕКЦИЯ 5

Структурный анализ механизма и порядок его выполнения. Принцип образования рычажных механизмов. Структурные модификации механизма. Синтез структурных модификаций. Кинематический анализ механизма. Графические и аналитические методы кинематического анализа: достоинства и недостатки.

### 5.1. Структурный анализ механизма

Дадим постановку задачи структурного анализа механизма. Пусть имеется в наличии механизм или его схема; требуется выявить структурные особенности данного механизма. В процессе решения задачи структурного анализа механизма выполняется следующее:

- определяется число звеньев механизма;
- определяется число кинематических пар, дается их классификация;
- дается классификация механизма;
- определяется число степеней свободы механизма;
- выявляются местные подвижности;
- выявляются избыточные связи;
- механизм разбивается на структурные группы в соответствии с принципом Ассура.

*Структурный анализ является первым этапом исследования механизма. Полученная информация о структурных особенностях механизма используется на последующих этапах анализа (кинематический, силовой, точностный анализ) и при решении задач структурного синтеза механизмов.*

### 5.2. Принцип образования рычажных механизмов

Структурной модификацией называется механизм, структурное строение которого идентично структурному строению исходного механизма. Структурные модификации синтезируются в соответствии с принципом образования рычажных механизмов, который формулируется следующим образом.

- Из данного начального механизма и ограниченного набора структурных групп можно получить несколько механизмов, являющихся структурными модификациями.

Структурные модификации получаются способом присоединения или способом наложения структурных групп. *При этом поводки структурной группы не должны присоединяться к какому-либо одному звену.*

#### Задача

Выполнить структурный анализ механизма качающегося конвейера по его структурной схеме (Рис. 18). Синтезировать две структурные модификации заданного механизма.

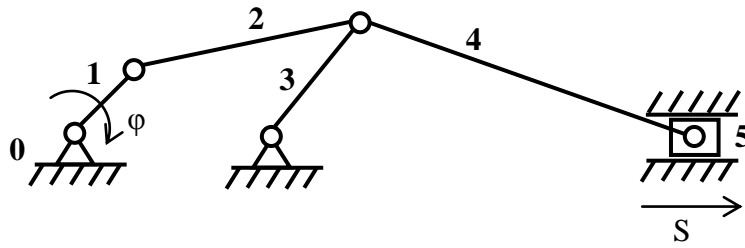


Рис. 18

### Решение

Механизм состоит из шести звеньев (0 – стойка, 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромысло, 4 – шатун, 5 – ползун). Кинематические пары: шесть вращательных (0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 3-0, 4-5) и одна поступательная (5-0). Все кинематические пары – одноподвижные, пятого класса, низшие. Данный механизм – исполнительный, рычажный, плоский, замкнутый, двухконтурный (0-1-2-3-0, 0-3-4-5-0). Число степеней свободы определим по формуле Чебышева ( $n = 6, p_H = 7, p_B = 0$ ):

$$W = 3(n-1) - 2p_H - p_B = 3 \cdot (6-1) - 2 \cdot 7 = 1.$$

Механизм имеет одну основную подвижность. Местных подвижностей нет. Механизм содержит контурные избыточные связи, число которых определим по формуле Озола ( $W = 1, k = 2, f = 7$ ):

$$q = W + 6k - f = 1 + 6 \cdot 2 - 7 = 6.$$

В механизме шесть контурных избыточных связей.

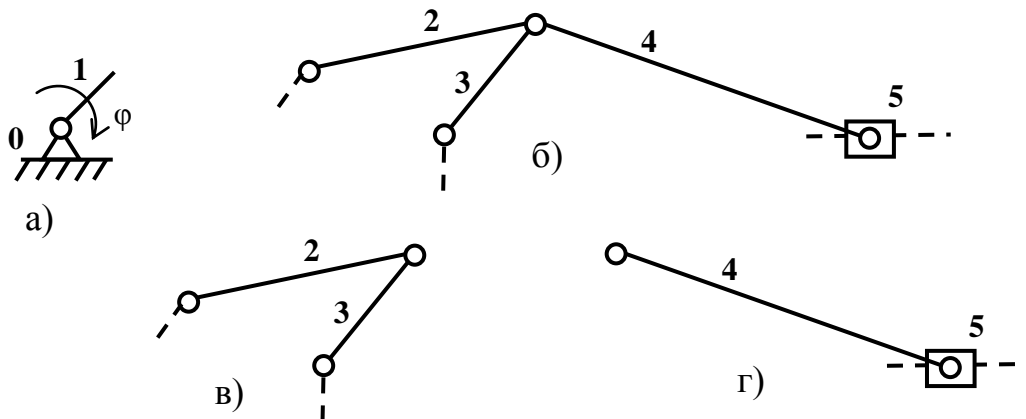


Рис. 19



В состав механизма входит одноподвижный начальный механизм (Рис. 19,а), ведомая цепь (Рис. 19,б), которая состоит из двух групп Ассур, имеющих первый класс и второй порядок (Рис. 19, в,г).

Получим структурные модификации механизма. Присоединим группу 4-5 к звеньям 1 и 0 начального механизма, затем добавим группу 2-3 к звеньям 5 и 0 (Рис. 20,а).

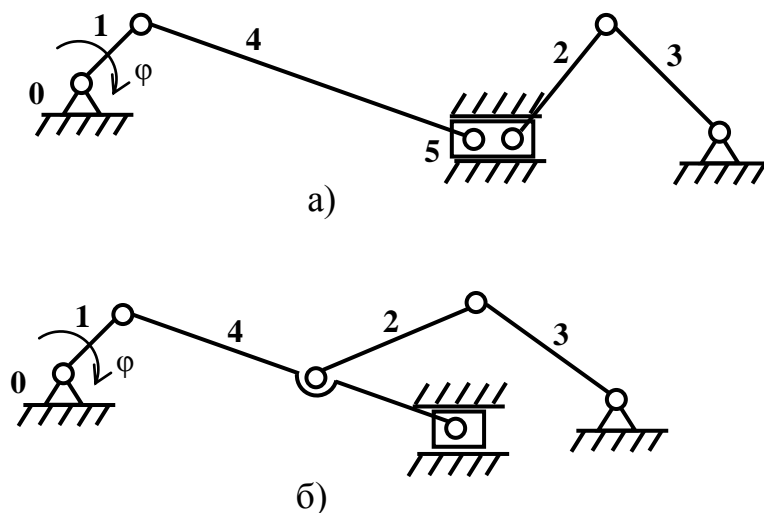


Рис. 20

Вторая структурная модификация (Рис. 20,б) получена присоединением группы 4-5 к звеньям начального механизма и группы 2-3 к звеньям 4 и 0.

Таким образом, синтезированы две структурные модификации заданного механизма, что и требовалось выполнить.

### 5.3. Кинематический анализ механизма

Целью кинематического анализа является определение кинематических особенностей исследуемого механизма: зависимостей положений выходных звеньев от положений входных звеньев (функций положения), а также определение положений, скоростей и ускорений звеньев относительно стойки.

Исходными данными для кинематического анализа являются кинематическая схема механизма, результаты структурного анализа и законы движения входных звеньев. Важнейшим этапом кинематического анализа является определение функций положения механизма. В зависимости от того, в каком виде определяются эти функции (график или формула), методы кинематического анализа подразделяются на графические и аналитические. Графические методы наиболее часто применяют для выполнения расчетов без использования компьютера, однако в настоящее время получили распространение инженерные пакеты программ, в которых функции положения вычисляются на основе графических построений (APM WinMachine). Анализ кинематики плоских механизмов выполняется также методом векторных

планов, который позволяет рассчитывать скорости и ускорения промежуточных звеньев. Графические методы отличает простая реализация, наглядность.

Преимуществом аналитических методов является возможность вычисления положений, скоростей и ускорений звеньев механизма с требуемой точностью при различных законах движения входных звеньев. Современные математические пакеты программ (MathCAD, MathLAB, Maple) позволяют существенно облегчить выполнение преобразований и построение кинематических диаграмм механизма. Применение аналитических методов ограничивается тем, что не для всякого механизма можно составить удобную с точки зрения анализа и дальнейшего использования формулу, задающую его функцию положения.

Кинематический анализ является следующим за структурным анализом этапом исследования механизма. *Результаты кинематического анализа (функции положений, аналоги скоростей и ускорений, планы положений, значения скоростей и ускорений звеньев механизма) используются в решении задач кинематического синтеза, а также динамического и точностного анализа проектируемого механизма.*

### Контрольные вопросы

1. Что необходимо выполнить при исследовании структуры механизма?
2. Что называют структурной модификацией механизма?
3. Сформулируйте принцип образования рычажных механизмов.
4. Почему при синтезе структурных модификаций нельзя присоединять поводки структурной группы к одному и тому же звену? Обоснуйте свой ответ.
5. Сформулируйте задачу кинематического анализа механизма.
6. В чем различие графических и аналитических методов кинематического анализа механизмов?
7. В каких инженерных задачах используются результаты кинематического анализа механизма?

## ЛЕКЦИЯ 6

Графический и аналитический методы определения функции положения механизма. Методы графического дифференцирования.

### 6.1. Определение функции положения механизма графическим методом

Пусть требуется определить функцию положения плоского механизма. Эта задача может быть решена путем вычерчивания механизма в масштабе в нескольких назначенных положениях и нахождения соответствующих им точек функции положения. Полученные таким образом точки интерполируются плавной кривой линией, которая с определенной точностью является искомой

функцией положения исследуемого механизма. Указанное геометрическое построение называется планом положений. На рис. 21 показан план положений исполнительного механизма поперечно-строгального станка.

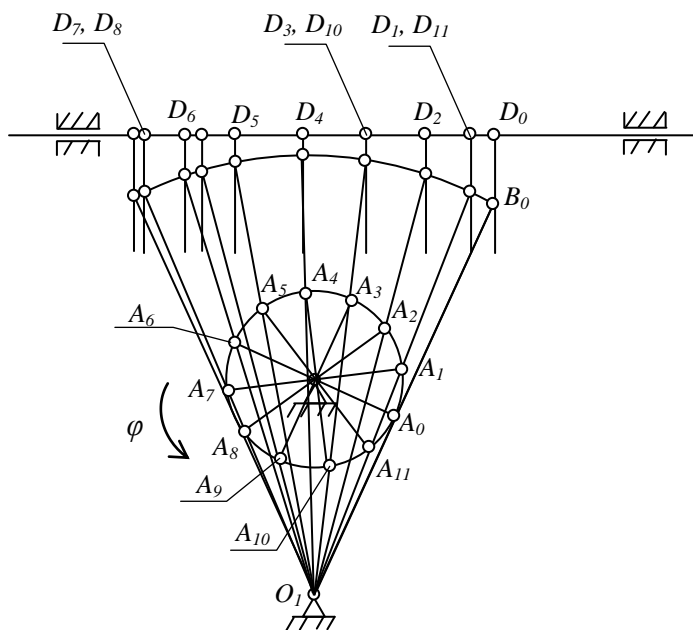


Рис. 21

Функция положения данного механизма, построенная с помощью плана положений (Рис. 21), приведена на рис. 22.

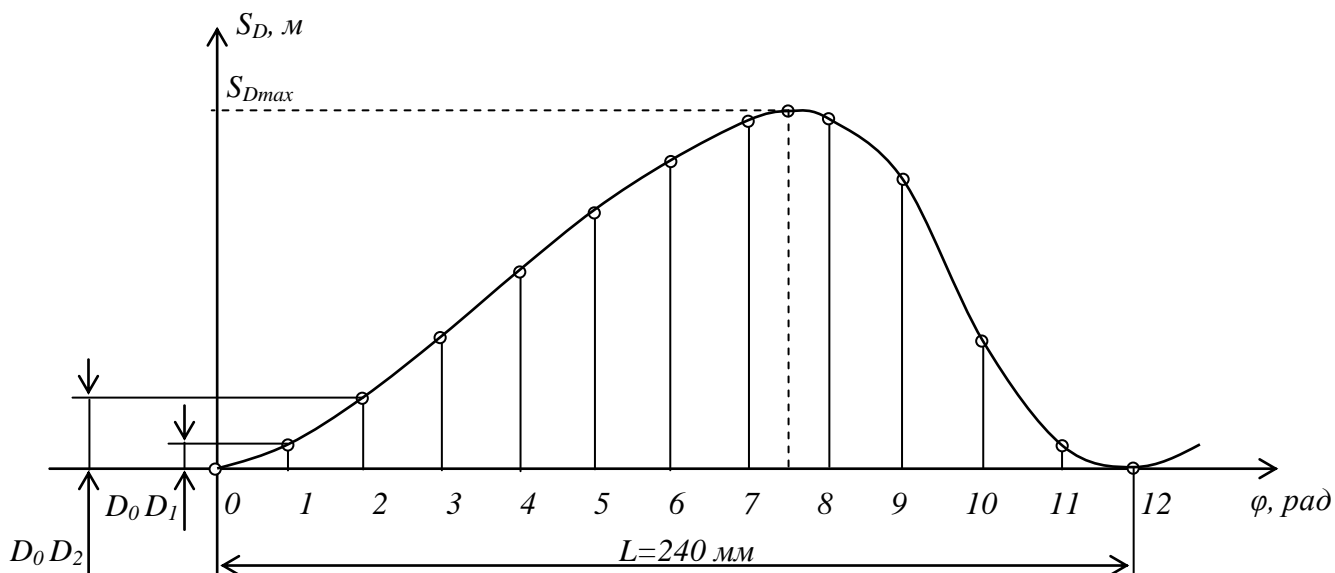


Рис. 22

На оси абсцисс пронумерованы положения входного звена (кривошипа), соответствующие его поворотам на каждые  $\pi/6$  рад от крайнего правого

положения механизма, принятого за нулевое. Масштаб  $\mu_s$  плана положений определяется следующим образом:

в 1 мм плана положений – 0.00x м реального механизма, тогда

$$\mu_s = 0.00x \left[ \frac{м}{мм} \right].$$

Например, если реальный механизм на плане надо уменьшить в два раза (1:2), то  $x = 0.002$  и  $\mu_s = 0.002 \left[ \frac{м}{мм} \right]$ . При выборе масштаба плана положений в инженерных расчетах следует придерживаться ГОСТ 2.302-68. Масштаб угла поворота кривошипа на графике (Рис. 22) определяется формулой:

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{L} \left[ \frac{рад}{мм} \right].$$

## 6.2. Определение функции положения механизма аналитическим методом

Аналитический метод предполагает поиск функции положения механизма в виде аналитической зависимости (формулы). Для его реализации необходимо аналитически описать уравнения геометрических связей, имеющих в механизме и путем алгебраических преобразований получить формулу, выражающую функцию положения.

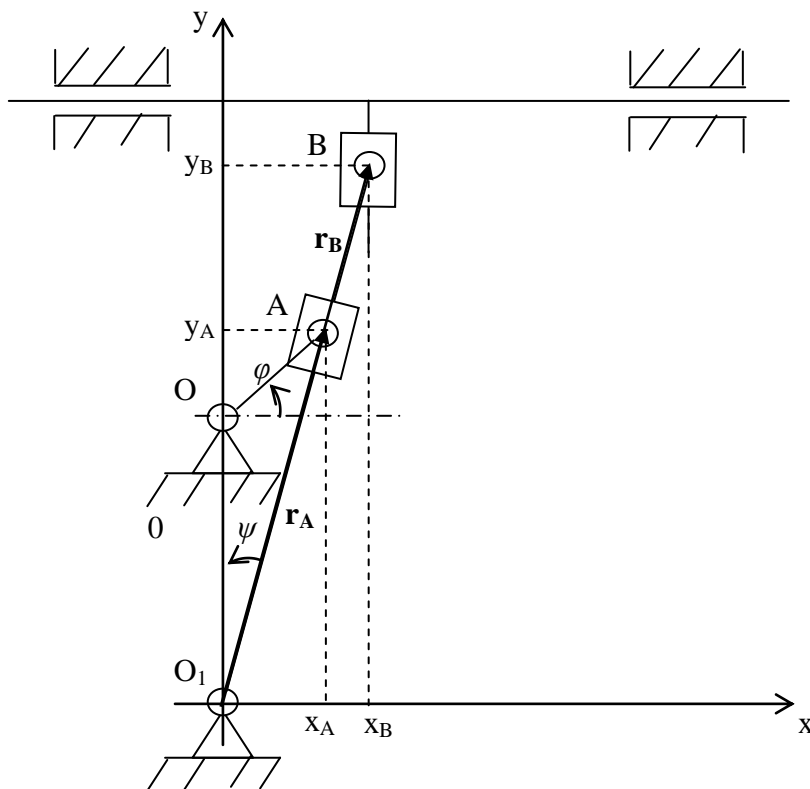


Рис. 23

Определим функцию положения механизма поперечно-строгального станка (Рис. 23) аналитическим методом. Обозначим  $R$  – радиус кривошипа  $OA$ ,  $a$  – расстояние  $O_1O$ ,  $L$  – длина кулисы  $O_1B$ . Тогда радиус вектор  $\bar{r}_A$ , задающий положение шарнира  $A$  будет определяться равенством:

$$\bar{r}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ a + R \sin \varphi \end{bmatrix},$$

Следовательно,  $\sin \psi = \frac{x_A}{r_A} = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR \sin \varphi}}$  и

$$x_B = L \sin \psi = \frac{LR \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR \sin \varphi}}.$$

Угол поворота кулисы  $\psi_0$ , соответствующий крайнему правому положению механизма:

$$\psi_0 = \arctg \left( \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}} \right).$$

Окончательно, искомая функция имеет вид:

$$S = L \sin \psi_0 - \frac{LR \cos \varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR \sin \varphi}},$$

где  $S, m$  – перемещение суппорта, отсчитываемое от его крайнего правого положения.

### 6.3. Графическое дифференцирование

Если имеется график функции положения механизма, то вычисление производных – аналогов скорости и ускорения выполняется с использованием методов графического дифференцирования. Эти методы используют геометрический смысл производной функции одного аргумента (Рис. 24,а):

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. производная функции, вычисленная при фиксированном значении аргумента, равна тангенсу угла, образованного осью абсцисс и касательной  $\tau$ , проведенной к графику функции в точке вычисления производной.

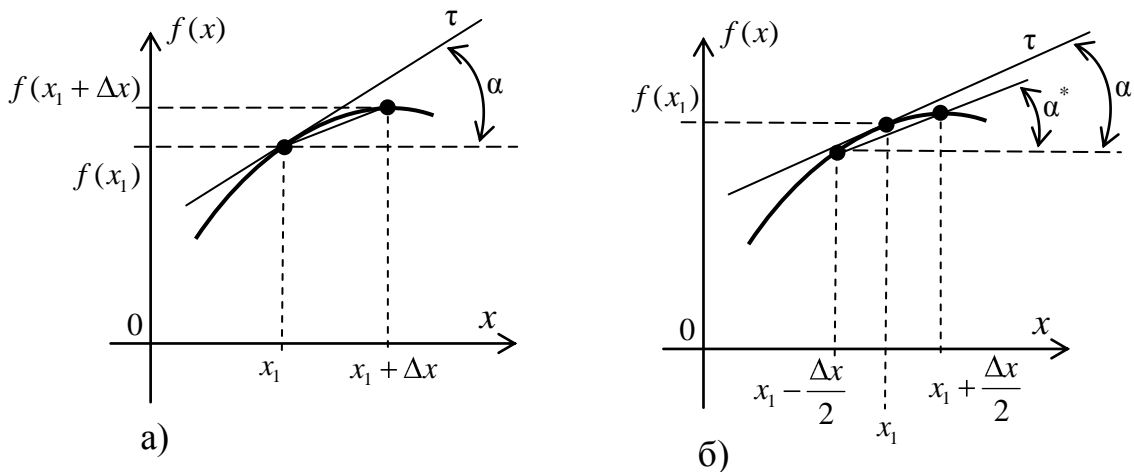


Рис. 24

Ясно, что значения производной функции в заданных точках можно найти геометрически, проводя касательные к графику функции. При этом нет необходимости измерять углы наклона касательных и вычислять тангенсы, так как при постоянном значении прилежащего к углу  $\alpha$  катета, значения производной в каждой точке графика будут пропорциональны длине противолежащего катета. В теории механизмов для графического вычисления аналогов скорости и ускорения применяются метод касательных и метод хорд.

Метод касательных предполагает выполнение следующих геометрических операций.

- В пронумерованных точках графика функции проводятся касательные.
- Полученные касательные параллельно переносятся и проводятся через одну и ту же заранее выбранную точку на оси абсцисс, лежащую на расстоянии  $k$  слева от оси ординат.
- Измеряется расстояние от начала отсчета до точки пересечения касательной с осью ординат, которое пропорционально значению производной.

Масштабы первой и второй производных вычисляются по формулам:

$$\mu_{\frac{\partial S}{\partial \varphi}} = \frac{\mu_S}{k \cdot \mu_\varphi} \left[ \frac{м}{мм} \right], \quad \mu_{\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2}} = \frac{\mu_{\partial S / \partial \varphi}}{k \cdot \mu_\varphi} \left[ \frac{м}{мм} \right].$$

где расстояние  $k$  - в миллиметрах. Несмотря на то, что метод касательных теоретически позволяет вычислить производную абсолютно точно, погрешности геометрических построений и измерений практически позволяют выполнить лишь приближенные вычисления. Наибольший вес здесь имеют ошибки при проведении касательных, особенно в тех случаях, когда расчет выполняется без применения средств автоматизации геометрических построений (вручную).

Метод хорд основан на идее замены касательной, проведенной в точке графика посередине малого интервала, хордой, стягивающей точки графика на концах интервала (рис. 24,б).

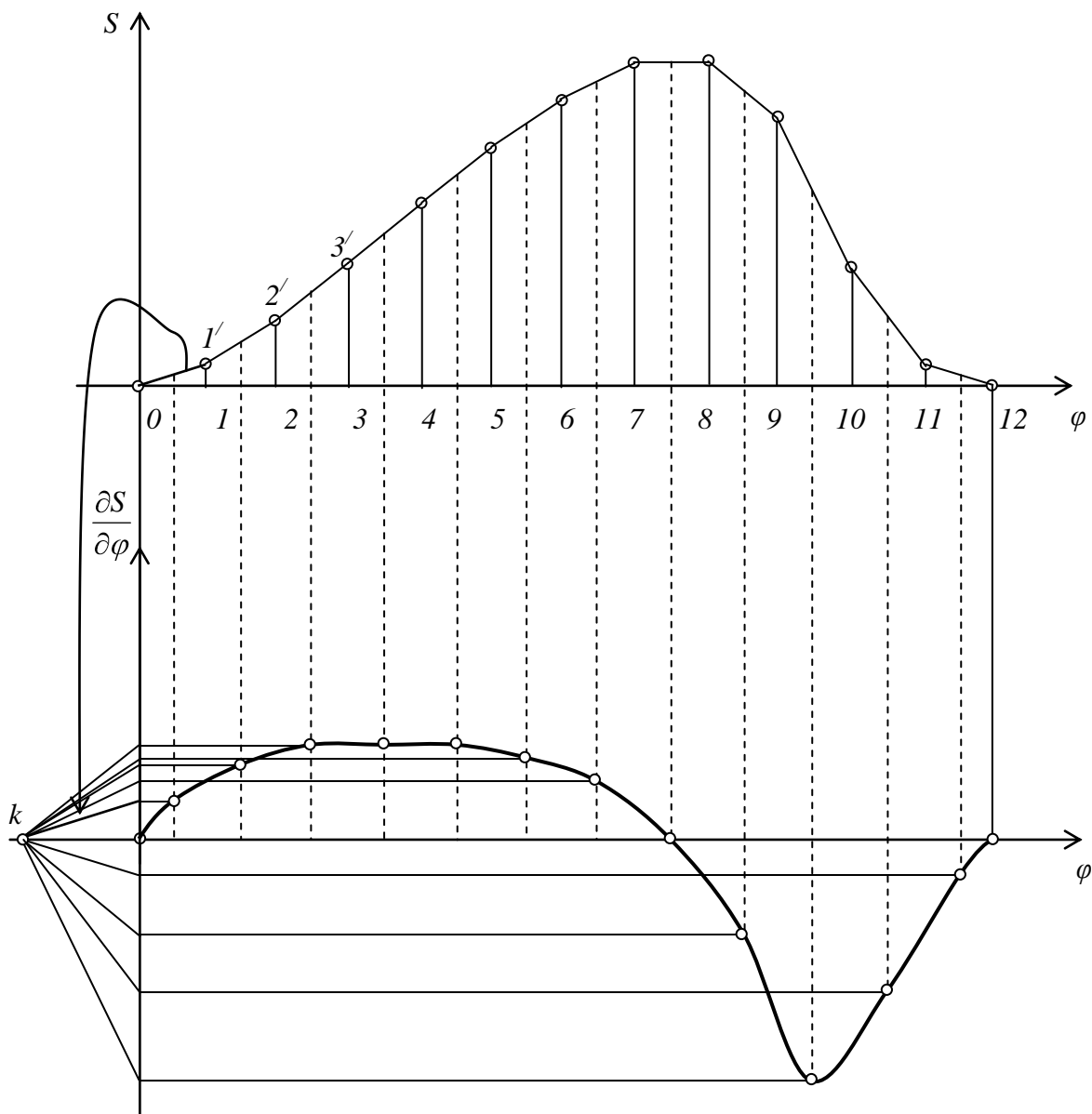


Рис. 26

Ясно, что если функция  $f(x)$  гладкая и в пределах интервала  $\Delta x$  ее производная не изменяется очень быстро, то  $\alpha^* \approx \alpha$  и замена касательной  $\tau$  на хорду при графическом дифференцировании вполне оправдана, так как построение хорды вручную существенно более точное, чем построение касательной. На рис. 25 показано, как методом хорд определяется аналог скорости исполнительного механизма строгального станка. Стрелкой указан параллельный перенос одной из хорд при выполнении расчета.

Аналог ускорения определяется в том же порядке, путем графического дифференцирования аналога скорости. Масштабы производных вычисляются по тем же формулам, что и в методе касательных. Следует отметить, что при

выполнении ответственного расчета вручную, повторное графическое дифференцирование из-за больших погрешностей не допускается.

### Контрольные вопросы

1. Что называют планом положений механизма?
2. Какое положение механизма обычно принимается за начальное (нулевое) при построении плана положений?
3. Как при помощи плана положений построить график функции положения механизма?
4. В каком виде определяется функция положения механизма при использовании аналитического метода?
5. Во всех ли случаях целесообразно, выполняя кинематический анализ механизма, использовать аналитический метод? Обоснуйте свой ответ.
6. Какое утверждение положено в основу методов графического дифференцирования функции положения?
7. Как выполняется графическое дифференцирование методом касательных?
8. В каком случае, вместо метода касательных, удобнее применить метод хорд?

## ЛЕКЦИЯ 7

Теоретические основы метода векторных планов. Вычисление скоростей и ускорений звеньев плоского механизма методом векторных планов. Использование понятий мгновенного центра скоростей и мгновенного центра ускорений в решении задач кинематического анализа плоских механизмов.

### 7.1. Метод векторных планов

Некоторые физические величины, характеризующие состояние исследуемой системы, могут быть математически представлены в виде направленных отрезков (векторов). Например, векторными величинами являются скорости и ускорения точек механической системы, силы, приложенные к системе, переменные ток и напряжение в электрической цепи и т.п. В подобных случаях процессы, протекающие в системе, описываются векторными уравнениями. *Если векторы, входящие в уравнения, находятся в одной и той же плоскости, то уравнения могут быть решены путем геометрических построений векторов на плоскости в заранее принятом масштабе. В этом заключается идея метода векторных планов.* Когда требуется вычислить скорости и ускорения звеньев плоского механизма в каких-либо его положениях, метод векторных планов является удобным и часто применяется на практике.



Как известно из теоретической механики, скорость и ускорение любой точки твердого тела, совершающего плоское движение (Рис. 27), могут быть найдены с помощью векторных уравнений:

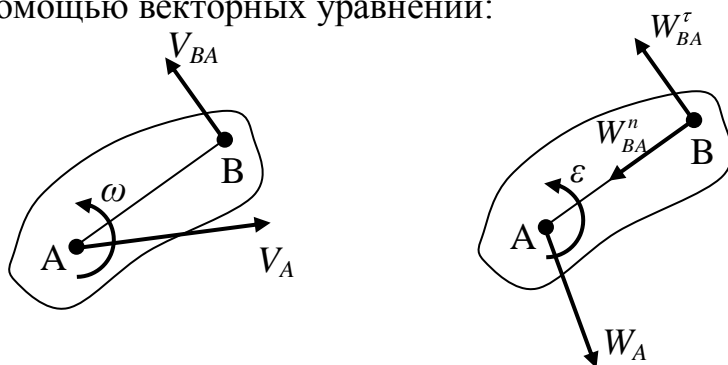


Рис. 27

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad \bar{W}_B = \bar{W}_A + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau,$$

где  $\bar{V}_A, \bar{W}_A$  - векторы абсолютных скорости и ускорения точки  $A$  тела,  $\bar{V}_{BA}$  - вектор скорости точки  $B$  относительно точки  $A$ ,  $\bar{W}_{BA}^n, \bar{W}_{BA}^\tau$  - векторы нормального и тангенциального (касательного) ускорений точки  $B$  относительно точки  $A$ . Модули векторов  $\bar{V}_{BA}, \bar{W}_{BA}^n, \bar{W}_{BA}^\tau$  вычисляются по формулам

$$V_{BA} = (AB) \cdot \omega, \quad W_{BA}^n = (AB) \cdot \omega^2, \quad W_{BA}^\tau = (AB) \cdot \varepsilon,$$

где  $\omega, \varepsilon$  - угловые скорость и ускорение тела.

Векторные планы, соответствующие векторным уравнениям скоростей и ускорений, представлены на рис. 28.

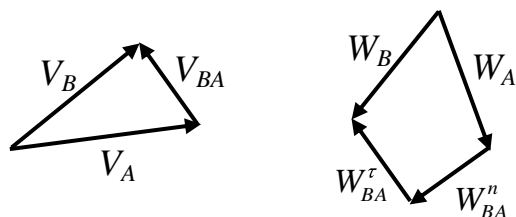


Рис. 28

Таким образом, выполнив графически сложение векторов и измерив на планах отрезки, соответствующие скорости  $\bar{V}_B$  и ускорению  $\bar{W}_B$ , получаем информацию о направлениях и величинах векторов  $\bar{V}_B$  и  $\bar{W}_B$ .

## Вычисление скоростей и ускорений звеньев плоского механизма методом векторных планов

В задачах кинематического анализа плоских механизмов угловые скорости и ускорения промежуточных звеньев, как правило, неизвестны. Но так как промежуточные звенья составляют группы Ассура, образующие кинематические пары со стойкой, известными являются траектории точек звеньев относительно стойки. Этот факт позволяет решить поставленную задачу без необходимости знать угловые скорости и ускорения промежуточных звеньев механизма.

### Задача

Стержень  $OA$  шарнирного четырехзвенного механизма (рис. 29,а) вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня  $AB$ , а также ускорение шарнира  $B$  в положении, указанном на рисунке, если  $AB = 2OA = 2a$ .

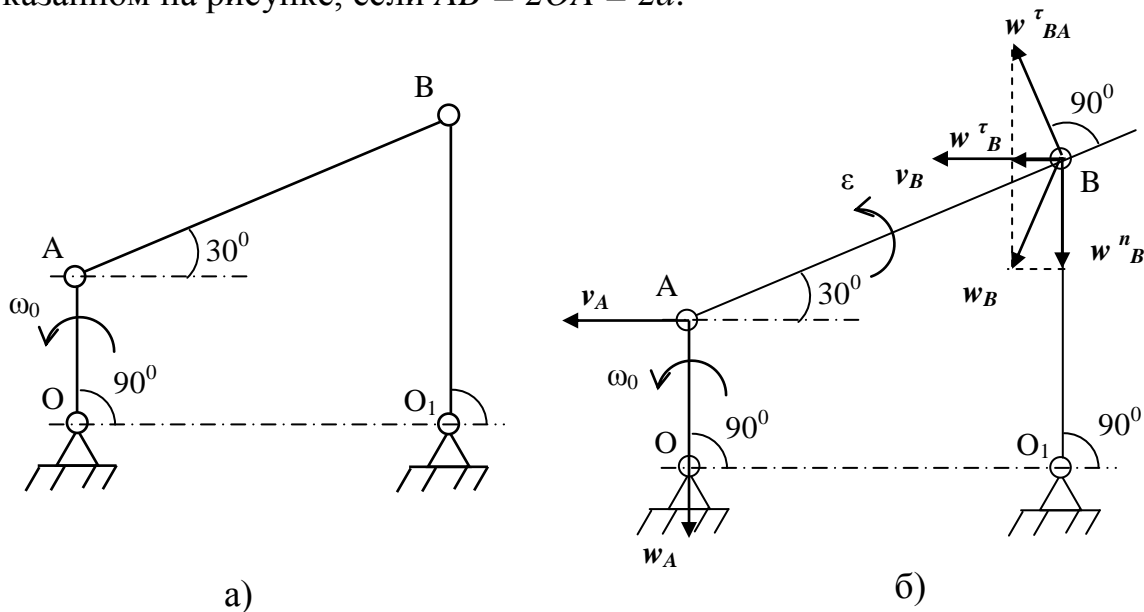


Рис. 29

### Решение

Стержень  $AB$  изображенного на рисунке четырехзвенного механизма совершает плоское движение, а стержни  $OA$  и  $O_1B$  вращаются вокруг неподвижных центров  $O$  и  $O_1$ . Найдем скорость шарнира  $A$ :

$$v_A = a \cdot \omega_0.$$

Вектор  $\bar{v}_A$  перпендикулярен  $OA$  и направлен в сторону вращения стержня  $OA$  (рис. 18). Для скорости шарнира  $B$  справедливо равенство:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA},$$

причем направление  $\bar{v}_B$ , согласно положению механизма, будет то же, что и у  $\bar{v}_A$ . Из этого следует, что  $\bar{v}_B = \bar{v}_A$ ,  $\bar{v}_{BA} = 0$ ,  $\omega = v_{BA}/l_{BA} = 0$ , т.е. стержень  $AB$  совершает мгновенно-поступательное движение.

Найдем ускорение шарнира  $A$ . Так как этот шарнир движется вокруг неподвижной точки  $O$ , то для его ускорения справедливо равенство:

$$\bar{w}_A = \bar{w}_A^n + \bar{w}_A^\tau,$$

где  $w_A^n = a\omega_0^2$  - нормальное ускорение, направленное от точки  $A$  к центру вращения  $O$ ;  $\bar{w}_A^\tau = a\varepsilon_0 = 0$ , т.к.  $\varepsilon_0 = d\omega_0/dt = 0, \omega_0 = const$ . В данном случае  $\bar{w}_A = \bar{w}_A^n$ . Для ускорения шарнира  $B$  справедливо равенство:

$$\bar{w}_B^n + \bar{w}_B^\tau = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}^n + \bar{w}_{BA}^\tau,$$

где  $w_B^n = v_B^2/l_{OB} = a^2\omega_0^2/2a = a\omega_0^2/2$  - нормальное ускорение шарнира  $B$  в его движении вокруг неподвижной точки  $O_1$ ;  $\bar{w}_{BA}^n = v_{BA}^2/l_{BA} = 0$  - нормальное ускорение шарнира  $B$  относительно точки  $A$ .

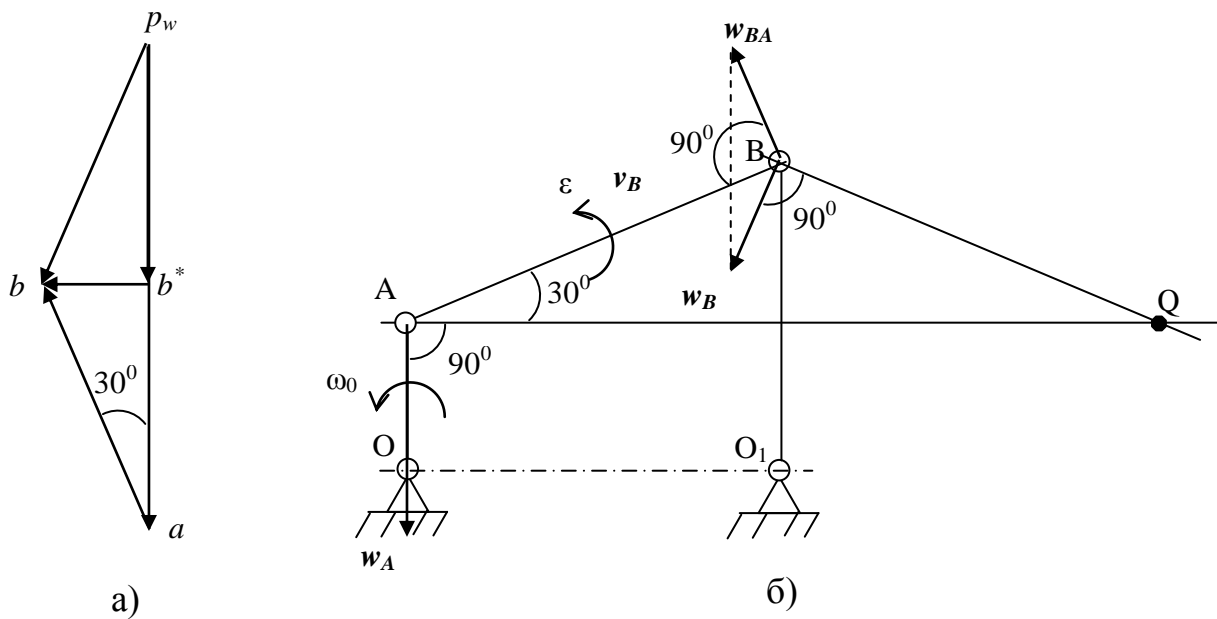


Рис. 30

Неизвестные по величине векторы  $\bar{w}_B^r, \bar{w}_{BA}^r$  определим, построив план ускорений. Для этого из произвольной точки  $p_w$ , называемой полюсом плана ускорений, отложим отрезок  $p_w a$ , отображающий ускорение  $\bar{w}_A$  (рис. 30,а). Тогда, проводя через точку  $a$  прямую, перпендикулярную  $AB$ , получим направление тангенциального ускорения  $\bar{w}_{BA}^r$ .

Составляющую результирующего ускорения  $\bar{w}_B^n$  отложим из полюса  $p_w$  в виде отрезка  $p_w b^*$ , длина которого вдвое меньше  $p_w a$ . Замкнем план ускорений прямой, перпендикулярной стержню  $O_1 B$  и задающей направление  $\bar{w}_B^r$ . На пересечении двух перпендикуляров получим точку  $b$ . Отрезок  $p_w b$  будет отображать ускорение  $\bar{w}_B$  шарнира  $B$ , а отрезок  $ab$  – ускорение  $\bar{w}_{BA}^r$ . План ускорений графически отображает векторное равенство, из плана легко определяются все неизвестные ускорения:

$$\frac{w_B^n}{w_B} = \frac{p_w b^*}{p_w b} \Rightarrow w_B = \frac{w_B^n}{\cos 30^\circ} = \frac{a\omega_0^2}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a\omega_0^2 - \text{ускорение шарнира } B;$$

$$ab = p_w b \Rightarrow w_{BA}^r = w_B, \quad \varepsilon = \frac{w_{BA}^r}{l_{BA}} = \frac{\sqrt{3}a\omega_0^2}{2a \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \omega_0^2 - \text{угловое ускорение стержня } AB.$$

Направления всех вычисленных скоростей и ускорений точек механизма изображены на рис. 29,б.

### 7.3. Использование понятий мгновенных центров скоростей и ускорений

Иногда удается получить более короткое решение за счет использования понятий мгновенный центр скоростей и мгновенный центр ускорений. *Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют такую точку плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени движения равна нулю. Скорости остальных точек фигуры при этом такие, какие они были бы при вращательном движении фигуры вокруг МЦС. Мгновенный центр ускорений (МЦУ), соответственно, это такая точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени движения равно нулю. Ускорения остальных точек фигуры такие, какие они были бы при ее вращательном движении относительно МЦУ.*

Решим предыдущую задачу, используя понятия МЦС и МЦУ. Из рис. 29,а видно, что стержень  $OA$  параллелен стержню  $O_1 B$ . Следовательно, абсолютные скорости точек  $A$  и  $B$  стержня  $AB$  параллельны. Учитывая, что в силу неизменности расстояния между точками  $A$  и  $B$  проекции скоростей  $\bar{v}_A$  и  $\bar{v}_B$  на направление  $AB$  должны быть одинаковыми (точка  $B$  не может догнать точку  $A$ , но также не может отстать от точки  $A$ ), заключаем, что  $\bar{v}_B = \bar{v}_A$ . Таким образом, стержень  $AB$  совершает мгновенно-поступательное движение, положение его МЦС бесконечно удалено и  $\omega = 0$ .

Определим направление ускорения  $\bar{w}_{BA}$  точки В в ее движении относительно точки А. Так как угловая скорость стержня  $AB$   $\omega = 0$ , то  $\bar{w}_{BA} = \bar{w}_{BA}^r$  и, следовательно, угол между  $\bar{w}_{BA}$  и  $AB$  равен  $90^0$  (рис. 30,б). Согласно определению понятия МЦУ угол между абсолютным ускорением  $\bar{w}_A = \bar{w}_A^n$  и направлением на МЦУ (точка  $Q$ ) также равен  $90^0$ . Для определения положения точки  $Q$  воспользуемся соотношением, справедливым при  $\omega = 0$ :

$$\frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \frac{w_{BA}}{AB} = \varepsilon.$$

Вычислим ускорение точки А:  $\bar{w}_A = \bar{w}_A^n = a\omega_0^2$ . В силу соотношения  $O_1B = AB = 2a$  будем иметь  $\bar{w}_B^n = \frac{1}{2}w_A = \frac{1}{2}a\omega_0^2$ . Так как  $\bar{w}_{BA}^n = 0$ , а  $\bar{w}_A$  направлено в ту же сторону, что и  $\bar{w}_B^n$ , заключаем:  $w_{BA} = w_B$ . Следовательно, получим  $AB = BQ = 2a$ , и точка  $Q$  будет симметрична точке А относительно направления  $O_1B$  (рис. 30,б). Тогда  $AQ = 4a \cos 30^0 = 2a\sqrt{3}$ ,  $\varepsilon = \frac{w_A}{AQ} = \frac{a\omega_0^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega_0^2$  и  $w_B = \varepsilon \cdot BQ = \frac{\sqrt{3}}{3}a\omega_0^2$ . Угол между  $\bar{w}_B$  и направлением  $BQ$ , согласно определению понятия МЦУ, составит  $90^0$ .

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит идея метода векторных планов?
2. Почему метод векторных планов целесообразно применять в кинематическом анализе плоского механизма?
3. По каким векторным уравнениям определяются скорость и ускорение произвольной точки звена плоского механизма?
4. Как можно решить векторное уравнение скорости звена плоского механизма, не имея информации об угловой скорости звена?
5. Что называют планом скоростей? Планом ускорений?
6. Что называют мгновенным центром скоростей твердого тела? Мгновенным центром ускорений?
7. Каким образом, зная положение МЦС звена в данный момент времени и скорость некоторой точки звена, можно вычислить скорость любой другой точки этого же звена?
8. Каким образом, зная положение МЦУ звена в данный момент времени и ускорение некоторой точки звена, можно вычислить ускорение любой другой точки этого же звена?